BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

К.А.ДЖАЛИЛОВ

Бакинский Государственный Университет

calilov kamran @ rambler.ru

Рассматривается смешанная задача для одного уравнения с дробной производной порядка $1<\alpha<2$. Решается обратная задача с дополнительным дробным интегральным условием. Применяются различные свойства функции Миттаг-Леффлера и доказывается существование и единственность решения поставленной задачи. В конце работы коротко рассмотрен случай $\alpha=2$, который соответствует колебанию стержня.

В работе изучается вопрос о существовании и единственности решения $\{u(x,t), f(x)\}$ следующей смешанной задачи с дробным интегральным условием:

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+u^{(4)}(x,t)=f(x), \qquad x\in(0,1), \qquad t\in(0,\mathrm{T}) \tag{1}$$

$$D_{00}^{\alpha-1}u(x,t)=b_1(x), \quad D_{00}^{\alpha-2}u(x,t)=b_2(x), \qquad x\in[0,1] \tag{2}$$

$$u^{(k)}(0,t)=u^{(k)}(1,t)=0; \qquad k=0,2, \qquad t\in(0,T] \tag{3}$$

и

$$D_{0\mathrm{T}}^{\alpha-3}u(x,t)=0, \qquad x\in[0,1], \tag{4}$$

где $b_1(x)$, $b_2(x)$ заданные на $[0;1]$ непрерывные функции, D_{0t}^{α} - производная в смысле Римана-Лиувилля, которая при $m-1<\alpha\le m$ определяется формулой:

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t\frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}d\tau\right], \text{ при } \beta<0,$$

$$D^{\beta}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(-\beta)}\int_0^t(t-\tau)^{-\beta-1}u(x,\tau)d\tau, \quad \mathrm{T}>0, \ 1<\alpha<2 \ \text{ и } \ u^{(4)}(x,t)=\frac{\partial^4u(x,t)}{\partial x^4}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Если задача (1)-(4) имеет решение $\{u(x,t), f(x)\}$, то оно единственное.

Доказательство. Предположим, что задача (1)-(4) имеет, по крайней мере, два решения $\{u_1(x,t), f_1(x)\}$ и $\{u_2(x,t), f_2(x)\}$.

Обозначим $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ и $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

Тогда $\{u(x,t), f(x)\}$ будет решением задачи:

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+u^{(4)}(x,t)=f(x), \tag{1}$$

$$D_{00}^{\alpha-1}u(x,t)=0, \quad D_{00}^{\alpha-2}u(x,t)=0. \tag{2^1}$$

$$u^{(k)}(0,t)=u^{(k)}(1,t)=0, \qquad k=0,2 \tag{3}$$

Решение этой задачи ищем в виде:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin \pi nx \tag{5}$$

Тогда для функции $u_n(t)$; получается задача Коши вида:

$$D_{0t}^{\alpha}u_n(t)+(\pi n)^4u_n(t)=f_n \tag{6}$$

$$D_{00}^{\alpha-1}u_n(t)=0, \qquad D_{00}^{\alpha-2}u_n(t)=0, \tag{7}$$

здесь $f_n = 2\int_0^1 f(x)\sin \pi nxdx$, коэффициент Фурье.

Известно [1],[2], что решение уравнения (6) с условиями

$$D_{00}^{\alpha-k}u_n(t)=b_{nk}, \qquad k=1,2,$$

где b_{nk} - любые заданные числа, представляется формулой:

$$u_n(t)=b_{n1}t^{\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-(\pi n)^4t^{\alpha};\alpha\right)+b_{n2}t^{\alpha-2}E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-(\pi n)^4t^{\alpha};\alpha-1\right)+$$

$$+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-(\pi n)^4(t-\tau)^{\alpha};\alpha\right)f_n d\tau, \tag{8}$$

здесь $E_{\frac{1}{\alpha}}(z;\mu)$ функция Миттаг-Леффлера и

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+\alpha k)}. \tag{9}$$

Учитывая, что в нашем случае $b_{n1}=b_{n2}=0$ и числа f_n - постоянные, получается:

$$u_n(t)=\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-(\pi n)^4(t-\tau)^{\alpha};\alpha\right)f_n d\tau = f_nt^{\alpha}E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-(\pi n)^4t^{\alpha};\alpha+1\right).$$

Заметим, что последняя формула получается разложением $E_{\frac{1}{\alpha}}$ в степенной ряд и его интегрированием. Таким образом, для решения задачи (1),(2^1),(3) имеем:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nt^{\alpha}E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-(\pi n)^4t^{\alpha},\alpha+1\right)\sin \pi nx \tag{10}$$

Теперь формулу (10) подставим в (4). При этом будем пользоваться формулой, которая верна при всех $\alpha>0$, $\mu>0$:

$$D_{0t}^{-\alpha}\left[t^{\mu-1}E_{\frac{1}{\alpha}}\left(\lambda t^{\alpha};\mu\right)\right]=t^{\mu+\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}\left(\lambda t^{\alpha};\mu+\alpha\right).$$

Комбинация этой формулы с (10) и равенством (4) дает:

$$D_{0T}^{\alpha-1}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nT^3E_{\frac{1}{\alpha}}(-(\pi n)^4T^{\alpha};4)\sin \pi nx=0$$

откуда следует, что

$$f_nT^3E_{\frac{1}{\alpha}}(-(\pi n)^4T^{\alpha};4)=0 \tag{11}$$

По предположению $1<\alpha<2$, значить $\frac{1}{2}<\frac{1}{\alpha}<1$.

Известно [3], что при $\rho>\frac{1}{2}$ функция $E_\rho(z;\mu)$ не имеет вещественных нулей. Таким образом, из (11) получается, что $f_n=0$, следовательно, $f(x)=0$ и $u(x,t)=0$. Единственность доказана.

Теорема 2. Пусть $b_1(x), b_2(x)$ дважды непрерывно-дифференцируемые на $L_2[0,1]$ функции и $b_k(0)=b_k(1)=0$, $k=1,2$. Тогда существует пара $\{u(x,t), f(x)\}$ являющейся решением задачи (1)-(4).

Доказательство. Предположим что $f(x)$ известная функция с коэффициентами Фурье $f_n=2\int_0^1 f(x)\sin\pi n dx$. Тогда решение смешанной задачи (1)-(3) представляется формулой:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\{b_{n1}t^{\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}(-(\pi n)^4t^\alpha;\alpha)+b_{n2}t^{\alpha-2}E_{\frac{1}{\alpha}}(-(\pi n)^4t^\alpha;\alpha-1)+$$
$$+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}(-(\pi n)^4(t-\tau)^\alpha;\alpha)f_n d\tau\}\sin\pi nx \quad . \tag{12}$$

Применением (4) из последней формулы определяем коэффициенты f_n в виде

$$f_n=-\frac{b_{n1}TE_{\frac{1}{\alpha}}(-(\pi n)^4T^\alpha;3)+b_{n2}E_{\frac{1}{\alpha}}(-(\pi n)^4T^\alpha;2)}{T^2E_{\frac{1}{\alpha}}(-(\pi n)^4T^\alpha;4)} \quad . \tag{13}$$

Таким образом, коэффициенты f_n выражаются известными величинами b_{n1}, b_{n2} и функцией Миттаг-Леффлера. Так как система $\{\sin\pi nx\}$ полна на $L_2[0,1]$, то найденные коэффициенты f_n однозначно определяют функцию $f(x)$.

Далее, непосредственной подстановкой проверяется, что функция $u(x,t)$, определяемая формулой (12) и коэффициентами (13) обращает (1), (2), (3) в равенство.

Наконец, остается доказать, что $u(x,t)$ имеет конечные производные $D_{0t}^\alpha u(x,t)$ и $u^{(4)}(x,t)$ при $0<t<T$ и $x\in(0,1)$. С этой целью приводится [1]

Лемма: Пусть $\rho>\frac{1}{2}$, μ-произвольное комплексное число и β-любое вещественное число, удовлетворяющее условию

$$\frac{\pi}{2\rho}<\beta<\min\left\{\pi,\frac{\pi}{\rho}\right\}.$$

Тогда для любого целого $p\geq 1$ при $|z|\to\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$E_\rho(z;\mu)=\rho z^{\rho(1-\mu)}\exp(z^\rho)-\sum_{m=1}^{p}\frac{z^{-m}}{\Gamma\left(\mu-\frac{m}{\rho}\right)}+O\left(|z|^{-p-1}\right), \qquad |\arg z|\leq\beta,$$

$$E_\rho(z;\mu) = -\sum_{m=1}^{p} \frac{z^{-m}}{\Gamma\left(\mu - \frac{m}{\rho}\right)} + O\left(|z|^{-p-1}\right), \qquad \beta \le |\arg z| \le \pi .$$

В нашем случае $z = -(k\pi)^4$, и потому применяется вторая формула.

Таким образом, с помощью приведенной леммы для (12) получаем мажорантный ряд вида:

$$C\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_{n1}| + |b_{n2}|}{n^4} , \qquad C \text{ -постоянное.}$$

Полученная оценка показывает, что с учетом свойств $b_1(x)$ и $b_2(x)$ можно произвести в (12) нужное число, раз дифференцирование и определить производную $D_{0t}^{\alpha}u(x,t)$ и $u^{(4)}(x,t)$. Теорема 2 доказана.

Теперь рассмотрим случай $\alpha = 2$. При этом соотношение (1) становится уравнением колебания стержня. При $\alpha = 2$ пользуясь формулой (9) имеем:

$$E_{\frac{1}{2}}(z;2) = \frac{sh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \quad E_{\frac{1}{2}}(z;3) = \frac{1}{2}(ch\sqrt{z} - 1), \quad E_{\frac{1}{2}}(z;4) = \frac{1}{z\sqrt{z}}(sh\sqrt{z} - \sqrt{z}) .$$

Взяв $z = -(\pi n)^4 T^2$ взамен формулы (12) получаем:

$$f_n \frac{1}{(\pi n)^4}(\sin(\pi n)^2 T - (\pi n)^2 T) = 0 .$$

Нетрудно видеть, что полученное уравнение не имеет вещественных нулей, значить $f_n = 0$. Итак, получается единственность решения. При доказательстве существования составляется аналогичная с (12) формула для решения, $u(x,t)$ которая выражается тригонометрическими функциями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. Дробные исчисления и его применение. М.: Физматлит, 2003, 272с.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и Техника, 1987, 688 с.
3. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972, 736 с.
4. Бейлин С.А. Смешанная задача с интегральным условием для волнового уравнения // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Институт Математики, 2005, с. 29-31.
5. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Математический журнал. Алмааты: 2009, т. 9, №2(32), с. 78-92.

KƏSR TÖRƏMƏLİ BİR TƏNLİK ÜÇÜN QOYULMUŞ TƏRS MƏSƏLƏ HAQQINDA

K.Ə.CƏLİLOV

XÜLASƏ

Özündə $1 < \alpha < 2$ tərtibli kəsr törəmə saxlayan bir tənlik üçün qarışıq məsələyə baxılır. İnteqral şəklində əlavə şərtlə tərs məsələ həll edilir. Mittaq-Leffler funksiyasının xassələrindən istifadə edərək qoyulmuş məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi isbat olunur. Sonda $\alpha = 2$ üçün çubuğun rəqs tənliyinə baxılır.

THE INVERSE PROBLEM FOR ONE EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVE

K.A.JALILOV

SUMMARY

The author considers the mixed problem for one equation with fractional derivative with $1 < \alpha < 2$ and solves the inverse problem with supplementary integral condition. Various properties of Mittaq-Leffler's function are applied, and existence and uniqueness of the decision of the presented problem are proved. At the end of the paper $\alpha = 2$ case which corresponds to core fluctuation is considered.